MATEMATICA DE LA DINÁMICA DE POBLACIONES

INTRODUCCION

Se analiza un modelo con difusión válido en el estudio de ciertos fenómenos que presentan características importantes. Existen modelos no lineales cuyo estudio está latente en el ambiente científico. Para describir un modelo no lineal hay que entender como funciona un modelo lineal, al no ser exacto en su mayor parte se aplican aproximaciones. En general para resultados no predecibles, las teorías no son firmes, esto favorece a una forma experimental. Nuestro interés en modelos no lineales es porque explican una mayor cantidad de fenómenos.

Una referencia teórica importante se encuentra en el estudio del biólogo marino Umberto D´Ancona, en relación a las variaciones de poblaciones de peces, su crecimiento estaba asociada con la competición por el alimento.

Un problema fundamental en biología es el crecimiento: célula, un órgano, una planta, ser humano, una población. Para este caso esencial se tiene la ecuación diferencial $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$, cuya solución general es $P(t) = ce^{kt}$, en donde c es una constante positiva, el crecimiento ocurre si $k > 0$, mientras que el decrecimiento lo es para $k < 0$.

Un defecto que se observa en esta ecuación y de la solución asociada es que cuando $k > 0$, entonces resulta que $P(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, a medida que el tiempo transcurre el crecimiento es ilimitado, lo cual está en conflicto con la realidad, sobre todo se miramos que después que pasa un cierto tiempo una célula deja de crecer, lo mismo que un ser humano, habiendo llegado un tamaño máximo.

METODOLOGÍA

Se sigue las siguientes etapas: (1) se hace un análisis de modelos que rigen el comportamiento poblacional de una especie; (2) se realizan comparaciones para ver las cualidades y limitaciones frente a un entorno natural; (3) se hace una propuesta que busque interrelaciones sostenible como modelo.

RESULTADOS

Primero se analiza el cambio, dada por una *ecuación logística*, propuesta por el matemático biólogo Verhulst, para predecir las poblaciones de varios países, $\frac{dP(t)}{dt} = P(t)(k - bP(t))$ siendo la condición inicial $P(0) = P_0$, es decir una población inicial P_0 para un tiempo inicial $t = 0$, y que $k > 0$ y $b > 0$, ecuación muy difundida en el ambiente científico, sin embargo cuando la población es muy grande, no proporciona un resultado muy exacto en relación al crecimiento poblacional.

Análisis:

Al ser la ecuación no lineal de variable separable, $\frac{dP}{kP-bP^2} = dt$, $P(0) = P_0$ es resoluble, $P(t) = \frac{kP_0}{bP_0+(k-bP_0)e^{-kt}}$, cuando el tiempo transcurre sin límite, $t \to \infty$, siendo $k > 0$, se obtiene

$$P_{máx} = \lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{kP_0}{bP_0+(k-bP_0)e^{-kt}}\right] = \frac{k}{b}.$$

Este resultado, confirma que se produce un límite de crecimiento de $P(t)$, tal como lo pide los hechos biológicos, colocando dos tiempos y dos poblaciones se obtiene

$$P(t)_{máx} = \lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{k}{b} = \frac{P_1^2 - P_0P_2}{P_1(P_0P_1 - 2P_0P_2 + P_1P_2)}.$$

Propuesta. Proponemos un modelo con difusión basado en la referencia de los trabajos de Lotka-Volterra

$$\frac{du}{dt} = mu(t) - nu(t)v(t)$$
$$\frac{dv}{dt} = -pv(t) + qu(t)v(t)$$

t indica el tiempo, mientras que $m.n, p$ y q son constante positivas y explican las proporcionalidades, es decir, estas constantes afectan de manera positiva o negativa al crecimiento de las especies. Daremos una interpretación biológica de este sistema, siendo un interés primordial las soluciones $u(t), v(t)$ ambas positivas con $t \geq 0$.

El estado de coexistencias no triviales ocurre cuando ambas componentes son no triviales y positivas.

Si la condición inicial cumple $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, entonces la única solución originada $(u(t), v(t))$ satisface $u(t) > 0$, $v(t) > 0$.

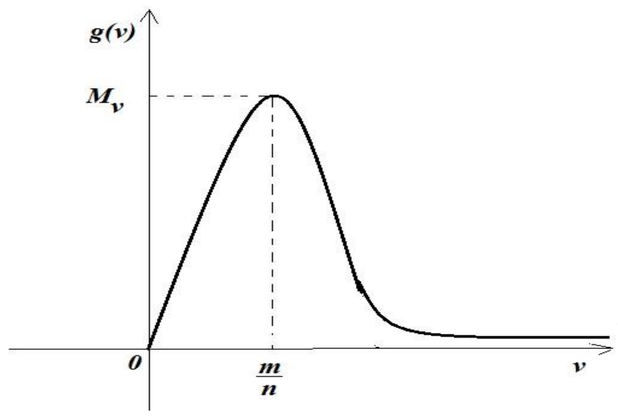


Figura 1: Gráfica de $g(v) = v^n e^{-nv}$

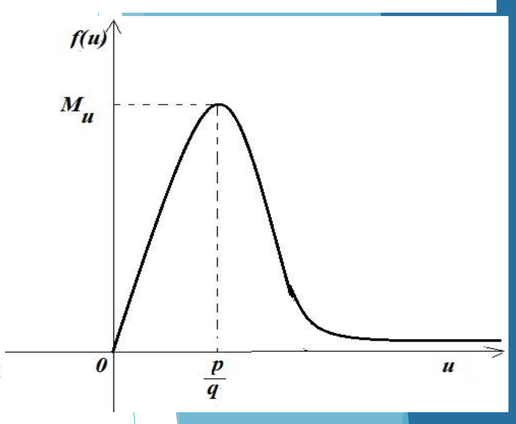


Figura 2: Gráfica de $f(u) = u^p e^{qu}$.

Por lo tanto, el conjunto de puntos en $\{(u(t), v(t))/t \geq 0\}$, es una curva cerrada en $\mathbb{R}^2$, esto implica que la solución es periódica.

Precisamente, si $(u(t), v(t))$ es un estado de coexistencia, entonces en aplicación del teorema de la función inversa, resulta $\frac{dv}{du} = \frac{v(-p+qu)}{u(m-nv)}$, al ser una ecuación de variables separables, la solución viene dada por

$$v^m u^p = c_1 e^{nv} e^{qu} \qquad \textbf{(1)}$$

Para $u > 0, v > 0$ la ecuación dada en (1) describe una curva cerrada.

Siendo $u > 0, v > 0$, consideremos las funciones $f(u) = \frac{u^p}{e^{qu}}$, $g(v) = \frac{v^m}{e^{nv}}$

Comportamiento de estas funciones:

(a) $\frac{dg(v)}{dv} = 0$, entonces $v = \frac{m}{n}$, así un valor máximo en $g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^m}{e^m} = M_v$ Figura 1.

(b) $\frac{df(u)}{du} = 0$, entonces $u = \frac{p}{q}$, así un valor máximo en $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^p}{e^p} = M_u$, figura 2.

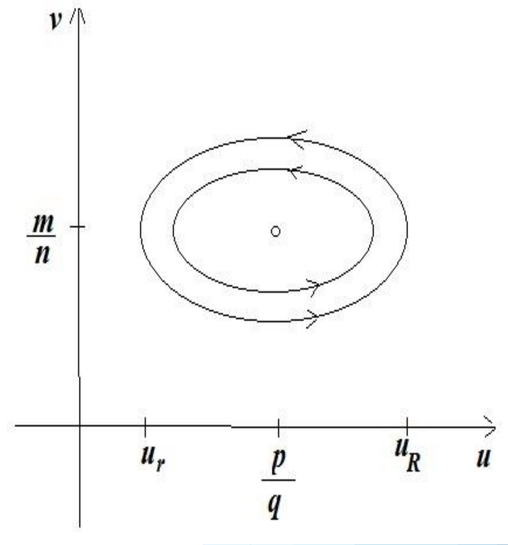


Figura 3. Órbita del sistema para u, v positivas

CONCLUSIONES

En el modelo malthusiano, se ha detectado una serie de problemas intrínsecos, como propuesta la función logística incorpora un término de capacidad de población sostenible, explica mejor el comportamiento de la población en un entorno natural, pero algunas cosas no reflejan la realidad. Entonces, una mejora en la interpretación es con un sistema tipo Lotka-Volterra.

En este modelo sin difusión, se observa que ninguna de las curvas cerradas contiene puntos de equilibrio de la ecuación, con excepción de $u = \frac{p}{q}$, $v = \frac{m}{n}$, lo cual confirma que las soluciones u(t), v(t) con $u(0)$ y $v(0)$ positivas son funciones periódicas del tiempo. Las soluciones deducidas, señalan un papel de importancia en dinámica de poblaciones, sin embargo queda abierta la posibilidad de analizar el mismo problema siguiendo un modelo con difusión, donde se tenga en cuenta la variación espacial de las especies, además del tiempo se considere otra variable de cambio de un lugar a otro.

Autor: Alberto Ernesto Gutierrez Borda,
Orcid: https://orcid.org/0000-0001-6260-2419
Afiliación: Universidad Nacional San Luis Gonzaga - Ica Perú